

Lezione 6

Risposta in frequenza

Risposta sinusoidale

Consideriamo un generico sistema dinamico lineare, di funzione di trasferimento $G(s)$:

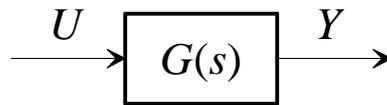


Fig. 1 : Un sistema dinamico lineare

ed imponiamo il seguente andamento sinusoidale all'ingresso u

$$u(t) = A \sin(\bar{\omega}t + \varphi)$$

A: ampiezza
 $\bar{\omega}$: pulsazione
 φ : fase (iniziale)

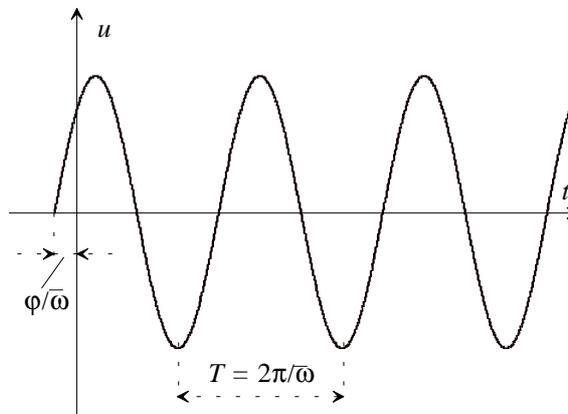


Fig. 2 : Ingresso sinusoidale

Teorema della risposta in frequenza

Se il sistema è **asintoticamente stabile**, esaurito un transitorio iniziale, anche l'uscita è sinusoidale, con la stessa pulsazione della sinusoide in ingresso, e risulta in particolare:

$$y(t) = B \sin(\bar{\omega}t + \psi)$$

con

$$\begin{cases} B = A|G(j\bar{\omega})| \\ \psi = \varphi + \angle G(j\bar{\omega}) \end{cases}$$

dove j è l'unità immaginaria.

Risposta in frequenza

Si definisce risposta in frequenza la seguente funzione complessa della variabile reale ω :

$$G(j\omega), \quad \omega > 0.$$

A partire dall'espressione della funzione di trasferimento, l'espressione della risposta in frequenza si ottiene semplicemente sostituendo a s il prodotto $j\omega$, e limitando il campo di variabilità di ω ai valori positivi.

Per l'applicazione del teorema della risposta in frequenza, per i sistemi asintoticamente stabili, occorre poi valutare il numero complesso $G(j\omega)$ (e quindi il suo modulo e la sua fase) in corrispondenza ad un particolare valore di ω (ossia in corrispondenza alla pulsazione della sinusoide in ingresso). Coerentemente con il significato assunto nel teorema, la variabile ω prende il nome di **pulsazione**.

Si osservi che la definizione di risposta in frequenza si dà per tutti i sistemi lineari, indipendentemente dalla stabilità.

Esempio

Sia:

$$G(s) = \frac{10}{1+s}, \quad u(t) = 2 \sin(5t + 0.3)$$

Il sistema è asintoticamente stabile, per cui il teorema è applicabile. L'espressione della risposta in frequenza è la seguente:

$$G(j\omega) = \frac{10}{1+j\omega} .$$

Siamo interessati a valutare la risposta in frequenza in corrispondenza della pulsazione $\omega=5$, ed in particolare il modulo e la fase del numero complesso risultante:

$$|G(j5)| = \left| \frac{10}{1+j5} \right| = \frac{10}{|1+j5|} = \frac{10}{\sqrt{1+25}} = \frac{10}{\sqrt{26}} = 1.961$$

$$\angle G(j5) = \angle \frac{10}{1+j5} = \angle 10 - \angle(1+j5) = 0 - \arctan(5) = -1.373$$

In base al teorema della risposta in frequenza, risulterà quindi, a transitorio esaurito:

$$y(t) = 2|G(j5)| \sin(5t + 0.3 + \angle G(j5)) = 3.922 \sin(5t - 1.073) .$$

Rappresentazione grafica della risposta in frequenza

Come tutte le funzioni, la risposta in frequenza è suscettibile di rappresentazione grafica. Occorre tuttavia considerare la risposta in frequenza è una funzione complessa della variabile reale ω . Sono allora utilizzabili varie forme di rappresentazione grafica, tra le quali assumono rilevanza le seguenti due:

Diagrammi polari

Per ogni valore di ω si riporta il punto nel piano complesso $G(j\omega)$. Congiungendo i punti si ottiene una linea che prende il nome di diagramma polare.

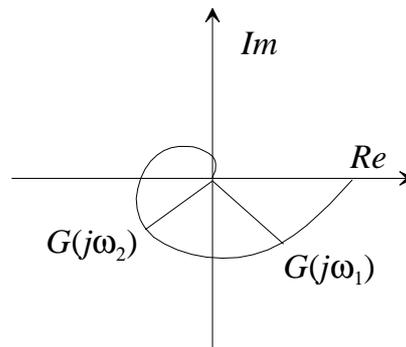


Fig. 3 : Diagramma polare

Diagrammi Cartesiani

Si tratta di una coppia di diagrammi, che rappresentano il modulo e la fase della risposta in frequenza rispetto alla pulsazione ω :

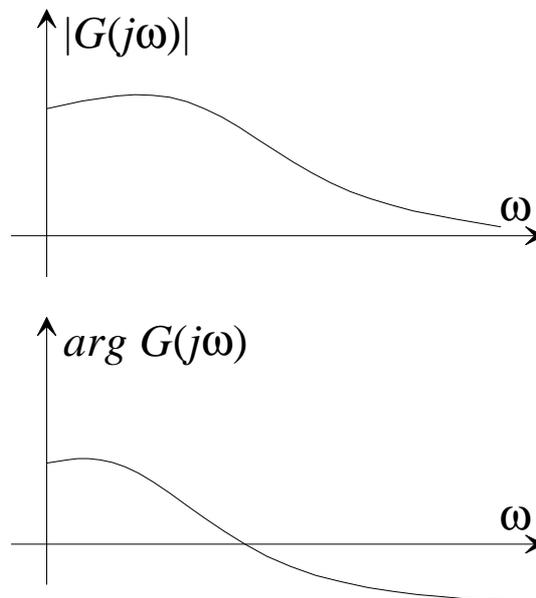


Fig. 4 : Diagrammi Cartesiani

Diagrammi di Bode

I **diagrammi di Bode** sono una coppia di diagrammi Cartesiani della risposta in frequenza, in cui le scale degli assi dell'ascissa e dell'ordinata sono scelte secondo un opportuno criterio che facilita il tracciamento dei diagrammi.

Sia nel diagramma del modulo che nel diagramma della fase l'asse delle ascisse (ossia l'asse delle pulsazioni) è in **scala logaritmica**. La distanza tra due generici punti che rappresentano le pulsazioni ω_1 e ω_2 è proporzionale alla differenza tra i logaritmi di ω_1 e ω_2 . In altre parole, date quattro pulsazioni $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ e ω_4 tali che:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\omega_4}{\omega_3},$$

la distanza sulla scala logaritmica tra ω_1 e ω_2 è uguale alla distanza tra ω_3 e ω_4 :



Fig. 5 : Scala logaritmica

In particolare la distanza tra due pulsazioni aventi rapporto pari a dieci prende il nome di **decade**:

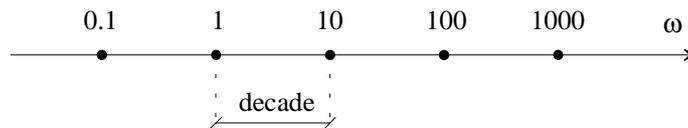


Fig. 6 : Decadi

Nel **diagramma del modulo** si rappresenta sull'asse delle ordinate il modulo in **decibel**, ossia il logaritmo in base 10 del modulo, moltiplicato per il fattore 20:

$$\left|G(j\omega)\right|_{dB} = 20\log_{10}\left|G(j\omega)\right|.$$

I valori del modulo in decibel vengono poi rappresentati su una scala lineare. Pertanto il diagramma del modulo viene tracciato su una **carta semilogaritmica**:

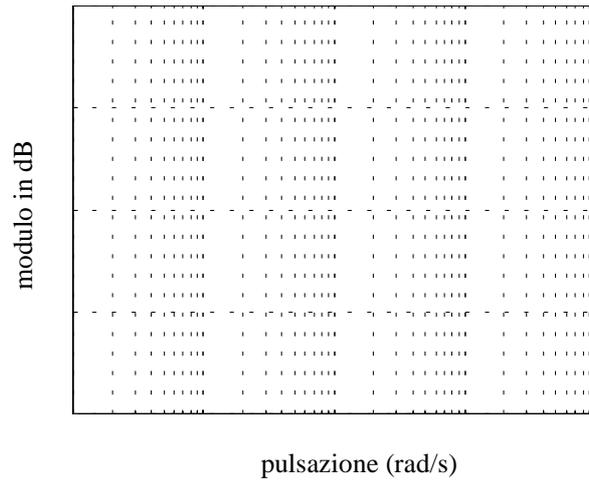


Fig. 7 : Diagramma del modulo in carta semilogaritmica

Nel **diagramma della fase** si rappresenta sull'asse delle ordinate la fase della risposta in frequenza in gradi, su scala lineare. Anche questo diagramma va quindi tracciato su carta semilogaritmica:

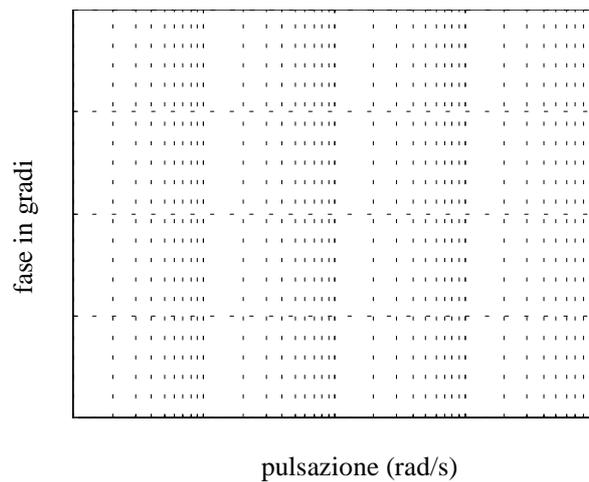


Fig. 8 : Diagramma della fase in carta semilogaritmica

Diagramma di Bode del modulo

Per una generica funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{\mu \prod_i (1 + s\tau_i)}{s^g \prod_k (1 + s\tau_k)}$$

il modulo della risposta in frequenza assume l'espressione:

$$|G(j\omega)| = \frac{|\mu| \prod_i |1 + j\omega\tau_i|}{|j\omega|^g \prod_k |1 + j\omega\tau_k|}$$

Il modulo in decibel si scriverà quindi come:

$$\begin{aligned} |G(j\omega)|_{dB} &= 20 \log_{10} |G(j\omega)| = 20 \log_{10} |\mu| + 20 \log_{10} \frac{1}{|j\omega|^g} \\ &\quad + \sum_i 20 \log_{10} |1 + j\omega\tau_i| + \sum_k 20 \log_{10} \frac{1}{|1 + j\omega\tau_k|} \end{aligned}$$

Vediamo come si tracciano i diagrammi dei singoli addendi di questa somma.

Guadagno

$$G(s) = \mu \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |\mu|$$

Si tratta di una retta orizzontale.

Esempi:

$$\mu = 100 \Rightarrow |\mu|_{dB} = 40$$

$$\mu = -10 \Rightarrow |\mu|_{dB} = 20$$

$$\mu = 0.1 \Rightarrow |\mu|_{dB} = -20$$

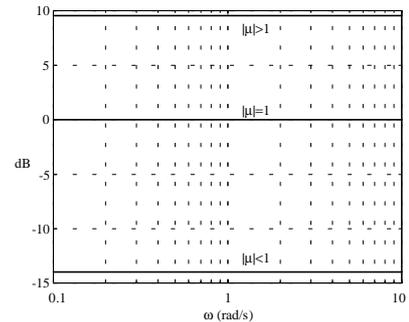


Fig 9 : Diagr. del modulo del guadagno

Zeri e poli nell'origine

$$G(s) = \frac{1}{s^g} \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} \frac{1}{|j\omega|^g} = -20g \log_{10} \omega$$

Si tratta di una retta di pendenza $-20g$ dB/decade, che taglia l'asse a 0 dB per $\omega=1$.

Si dice anche che la retta ha pendenza $-g$.

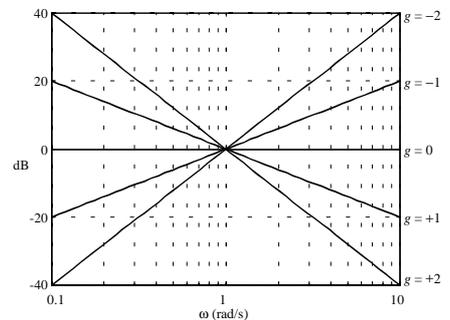


Fig 10 : Diagr. del modulo di zeri/poli in $s=0$

Zeri e poli reali

$$G(s) = (1 + s\tau)^{\pm 1} \Rightarrow$$

$$|G(j\omega)|_{dB} = \pm 20 \log_{10} |1 + j\omega\tau| = \pm 20 \log_{10} \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}$$

Per facilitare il tracciamento a mano si introducono i diagrammi asintotici.

$$|G(j\omega)|_{dB} \approx \begin{cases} 20 \log_{10} 1 = 0 & \omega \leq 1/|\tau| \\ \pm 20 \log_{10} |\omega\tau| & \omega > 1/|\tau| \end{cases}$$

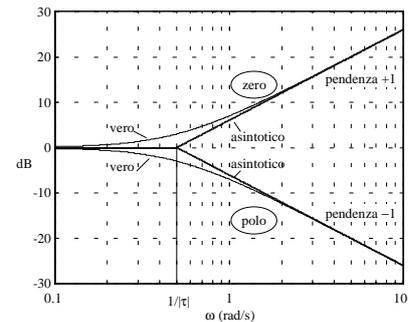


Fig 11 : Diagr. del modulo di poli/zeri reali

L'errore massimo tra diagramma vero ed asintotico si ha per $\omega = 1/|\tau|$, e vale $20 \log_{10} \sqrt{2} \approx 3dB$.

Il diagramma è del tutto indipendente dal segno di τ .

Se vi sono più zeri (poli) reali coincidenti, i diagrammi si sommano.

Zeri e poli complessi e coniugati

$$G(s) = [(1 + s\tau)(1 + s\bar{\tau})]^{\pm 1} = \left[1 + 2 \frac{\zeta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2} \right]^{\pm 1} \Rightarrow$$

$$|G(j\omega)|_{dB} = \pm 20 \log_{10} \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

I diagrammi asintotici si tracciano sostituendo ai due zeri (poli) due zeri (poli) reali coincidenti alla pulsazione ω_n . L'approssimazione è buona solo per valori di $|\zeta|$ elevati ($|\zeta| > 0.5$). Il diagramma non dipende dal segno di ζ .

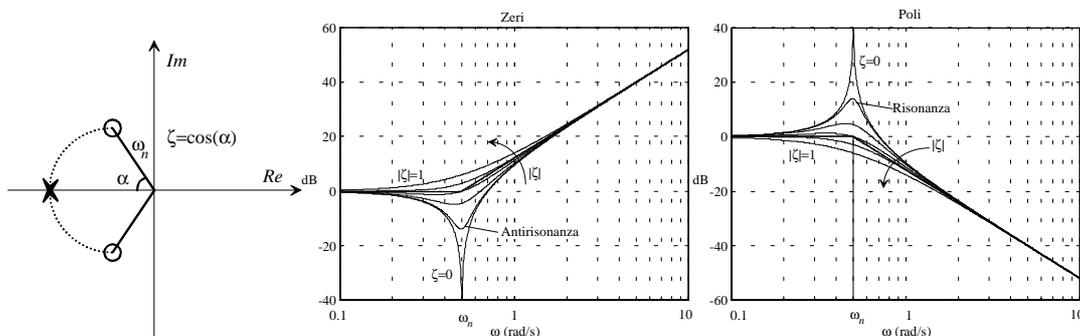


Fig.12 : Diagrammi del modulo di poli/zeri complessi e coniugati

Esempio di tracciamento

$$G(s) = \frac{10}{s} \frac{1-s}{(1+0.1s)^2}$$

$$|G(j\omega)|_{dB} = \overset{(1)}{20\log_{10}|10|} + \overset{(2)}{20\log_{10}\frac{1}{|j\omega|}} + \overset{(3)}{20\log_{10}|1-j\omega|} + \overset{(4)}{20\log_{10}\frac{1}{|1+j0.1\omega|^2}}$$

Sommando i singoli addendi si ottiene il diagramma asintotico di Bode del modulo della risposta in frequenza:

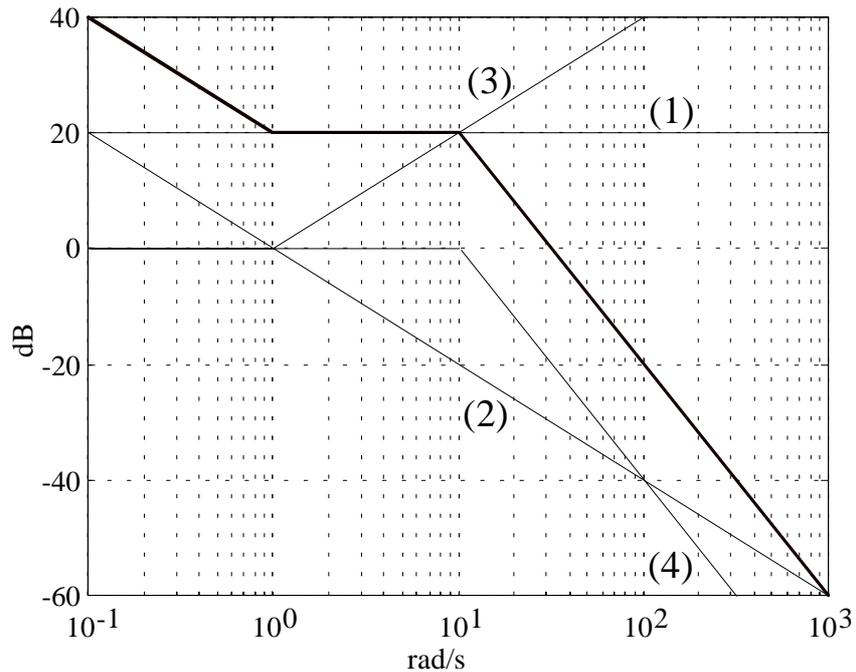


Fig. 13 : Diagramma di Bode del modulo

Per il **tracciamento veloce** del diagramma asintotico del modulo, ci si può servire delle seguenti **regole pratiche**:

1. A bassa frequenza ($\omega \rightarrow 0$) il diagramma giace sulla retta di pendenza $-g$, passante per il punto $[\omega = 1; |G|_{dB} = |\mu|_{dB}]$.
2. Ad ogni pulsazione corrispondente a p poli (zeri) reali, la pendenza diminuisce (aumenta) di p unità.
3. Ad ogni pulsazione corrispondente alla pulsazione naturale di p coppie di poli (zeri) complessi e coniugati, la pendenza diminuisce (aumenta) di $2p$ unità.
4. La pendenza finale è pari al numero degli zeri meno il numero dei poli (regola di verifica).

Diagramma di Bode della fase

Per una generica funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{\mu \prod_i (1 + s\tau_i)}{s^g \prod_k (1 + s\tau_k)}$$

la fase della risposta in frequenza assume l'espressione:

$$\angle G(j\omega) = \angle \mu + \angle \frac{1}{(j\omega)^g} + \sum_i \angle (1 + j\omega\tau_i) + \sum_k \angle \frac{1}{1 + j\omega\tau_k}$$

Vediamo come si tracciano i diagrammi dei singoli addendi di questa somma.

Guadagno

$$G(s) = \mu \Rightarrow \angle G(j\omega) = \angle \mu = \begin{cases} 0 & \mu \geq 0 \\ -180 & \mu < 0 \end{cases}$$

Si tratta di una retta orizzontale.

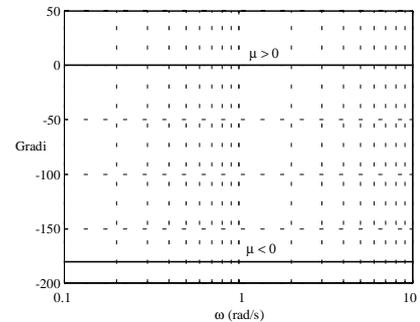


Fig. 14 : Diagr. della fase del guadagno

Zeri e poli nell'origine

$$G(s) = \frac{1}{s^g} \Rightarrow$$

$$\angle G(j\omega) = \angle \frac{1}{(j\omega)^g} = -\angle (j\omega)^g = -g \angle (j\omega) = -g \cdot 90^\circ$$

Si tratta di una retta orizzontale. Ad esempio un polo nell'origine ($g=1$), ossia un integratore, dà un contributo di fase costante pari a -90° .

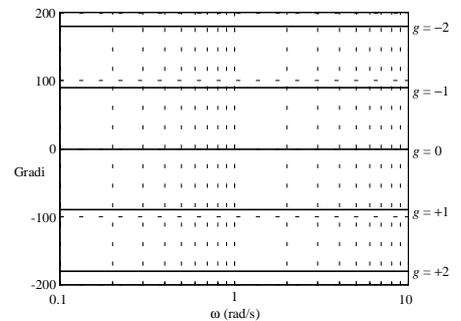


Fig. 15: Diagr. della fase di zeri/poli in $s=0$

Zeri e poli reali

$$G(s) = (1 + s\tau)^{\pm 1} \Rightarrow$$

$$\angle G(j\omega) = \angle(1 + j\omega\tau)^{\pm 1} = \pm \angle(1 + j\omega\tau) = \pm \arctan(\omega\tau)$$

Per facilitare il tracciamento a mano si introducono i diagrammi asintotici.

$$\angle G(j\omega) \approx \begin{cases} \angle 1 = 0 & \omega \leq 1/|\tau| \\ \pm \angle(j\omega\tau) & \omega > 1/|\tau| \end{cases}$$

Il diagramma dipende dal segno di τ . Infatti:

$$\angle(j\omega\tau) = \begin{cases} 90^\circ & \tau > 0 \\ -90^\circ & \tau < 0 \end{cases}$$

Se vi sono più zeri (poli) reali coincidenti, i diagrammi si sommano.

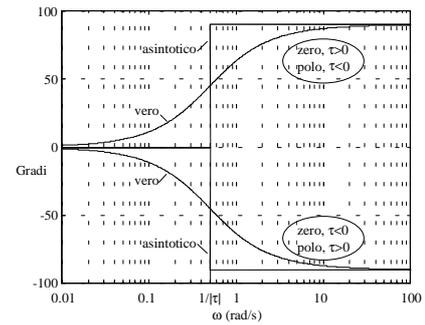


Fig. 16 : Diagr. della fase di zeri/poli reali

Zeri e poli complessi e coniugati

$$G(s) = [(1 + s\tau)(1 + s\bar{\tau})]^{\pm 1} = \left[1 + 2\frac{\zeta}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2} \right]^{\pm 1} \Rightarrow \angle G(j\omega) = \pm \arctan \left(\frac{\frac{2\zeta}{\omega_n}\omega}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \right)$$

I diagrammi asintotici si tracciano sostituendo ai due zeri (poli) due zeri (poli) reali coincidenti alla pulsazione ω_n . L'approssimazione è tanto migliore quanto più piccoli sono i valori di $|\zeta|$. Il diagramma dipende dal segno di ζ .

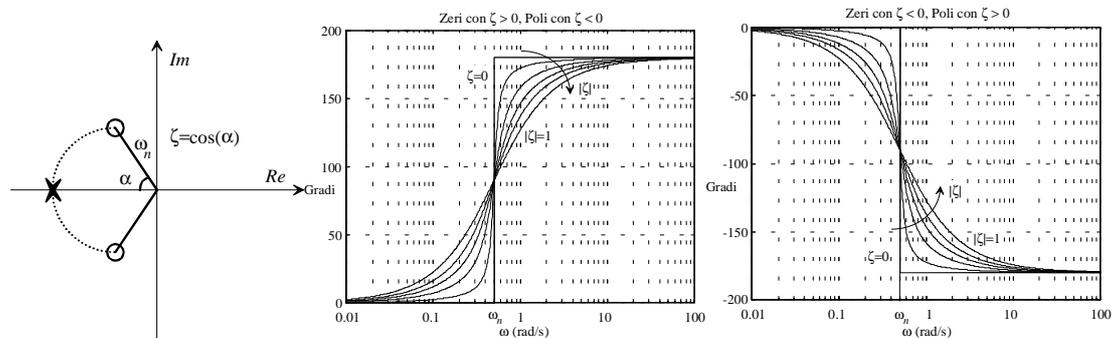


Fig. 17 : Diagrammi della fase di zeri/poli complessi e coniugati

Esempio di tracciamento

$$G(s) = \frac{10}{s} \frac{1-s}{(1+0.1s)^2}$$

$$\angle G(j\omega) = \overset{(1)}{\angle 10} + \overset{(2)}{\angle \frac{1}{j\omega}} + \overset{(3)}{\angle (1-j\omega)} + \overset{(4)}{\angle \frac{1}{(1+j0.1\omega)^2}}$$

Sommando i singoli addendi si ottiene il diagramma asintotico di Bode della fase della risposta in frequenza:

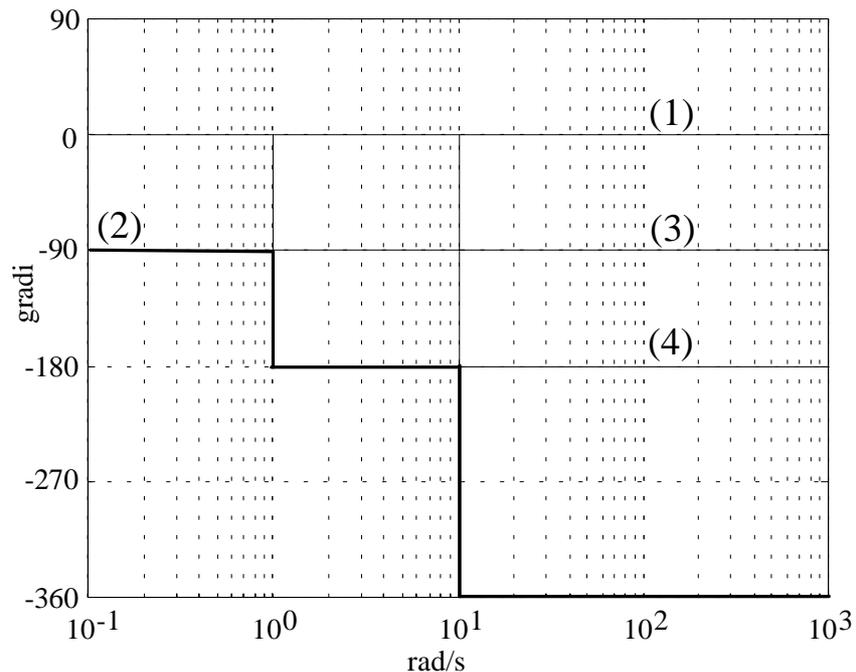


Fig. 18 : Diagramma di Bode della fase

Per il **tracciamento veloce** del diagramma asintotico della fase, ci si può servire delle seguenti **regole pratiche**:

1. A bassa frequenza ($\omega \rightarrow 0$) il diagramma giace sulla retta orizzontale di ordinata $\angle \mu - g90^\circ$.
2. Ad ogni pulsazione corrispondente a p zeri reali nel semipiano sinistro o p poli reali nel semipiano destro, il diagramma ha un salto positivo di $p90^\circ$.
3. Ad ogni pulsazione corrispondente a p zeri reali nel semipiano destro o p poli reali nel semipiano sinistro, il diagramma ha un salto negativo di $p90^\circ$.
4. Ad ogni pulsazione corrispondente alla pulsazione naturale di p coppie di zeri complessi e coniugati nel semipiano sinistro o p coppie di poli complessi e coniugati nel semipiano destro, il diagramma ha un salto positivo di $p180^\circ$.
5. Ad ogni pulsazione corrispondente alla pulsazione naturale di p coppie di zeri complessi e coniugati nel semipiano destro o p coppie di poli complessi e coniugati nel semipiano sinistro, il diagramma ha un salto negativo di $p180^\circ$.

Regolo delle fasi

Per il calcolo preciso della fase di una risposta in frequenza ad una determinata pulsazione $\bar{\omega}$, assumendo la funzione di trasferimento dotata solo di poli o zeri reali (o di poli e zeri complessi ad elevato smorzamento, approssimati con poli e zeri reali), occorrerà calcolare la seguente espressione:

$$\angle G(j\bar{\omega}) = \angle \mu - g90^\circ + \sum_i \arctan(1 + j\bar{\omega}\tau_i) - \sum_k \arctan(1 + j\bar{\omega}\tau_k)$$

dove gli arcotangenti sono espressi in gradi.

Volendo evitare il calcolo delle funzioni arcotangenti si può utilizzare uno strumento di calcolo manuale, detto **regolo delle fasi**, costituito da un righello sul quale sono tabulati i valori della funzione arcotangente.

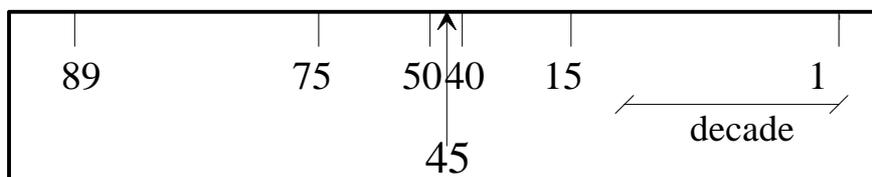


Fig. 19 : Regolo delle fasi

L'uso del regolo è molto semplice:

1. Si verifica, anzitutto, che l'ampiezza della decade riportata sul regolo sia congruente con l'ampiezza della decade della carta semilogaritmica sulla quale si sta tracciando il diagramma di Bode;
2. Si posiziona il regolo lungo l'asse delle pulsazioni, con la freccia (dei 45°) in corrispondenza della pulsazione $\bar{\omega}$;
3. Per ciascun polo o zero di costante di tempo τ , si individua sull'asse delle pulsazioni il valore $1/|\tau|$ e si legge il valore riportato sul regolo in corrispondenza di tale pulsazione;
4. Si sommano i contributi così ricavati, avendo cura di attribuire a ciascun contributo il giusto segno (a seconda che si tratti di un polo o uno zero e che esso si trovi nel semipiano destro o sinistro);
5. Si somma il contributo $\angle \mu - g90^\circ$.

Azione filtrante dei sistemi dinamici

Per i sistemi dinamici lineari asintoticamente stabili si è visto che la risposta in frequenza consente di calcolare la risposta a transitorio esaurito a ingressi sinusoidali. Questo risultato si può estendere a categorie di ingressi più generali.

Ingressi periodici

Si consideri un ingresso periodico $u(t)$:

$$u(t+T) = u(t), \quad \forall t.$$

Sotto ipotesi molto generali, tra cui l'assoluta integrabilità nel periodo,

$$\int_0^T |u(t)| dt < \infty,$$

è noto che il segnale è suscettibile di sviluppo in serie di sinusoidi (**serie di Fourier**):

$$u(t) = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}.$$

I coefficienti U_n e φ_n prendono il nome di coefficienti di Fourier di u ed il loro calcolo non è qui riportato.

Risulta allora che, esaurito un transitorio, anche l'uscita è periodica, con lo stesso periodo dell'ingresso, e si può scrivere:

$$y(t) = Y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \cos(n\omega_0 t + \psi_n),$$

con:

$$\begin{cases} Y_n = |G(jn\omega_0)| U_n \\ \psi_n = \varphi_n + \angle G(jn\omega_0) \end{cases}$$

In altre parole il teorema della risposta in frequenza vale per tutte le sinusoidi in cui è scomponibile il segnale di ingresso.

Ingressi aperiodici

Si consideri un ingresso aperiodico $u(t)$:

$$\exists T: u(t+T) = u(t), \quad \forall t.$$

Sotto ipotesi molto generali, tra cui l'assoluta integrabilità del segnale,

$$\int_0^{\infty} |u(t)| dt < \infty,$$

è noto che il segnale è suscettibile di sviluppo in integrale di sinusoidi (**integrale di Fourier**):

$$u(t) = \int_0^{\infty} U(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega)) d\omega.$$

Le funzioni $U(\omega)$ e $\varphi(\omega)$ costituiscono la trasformata di Fourier di u ed il loro calcolo non è qui riportato.

Risulta allora che, esaurito un transitorio, anche l'uscita è esprimibile con un integrale di Fourier:

$$y(t) = \int_0^{\infty} Y(\omega) \cos(\omega t + \psi(\omega)) d\omega ,$$

con:

$$\begin{cases} Y(\omega) = |G(j\omega)|U(\omega) \\ \psi(\omega) = \varphi(\omega) + \angle G(\omega) \end{cases} .$$

In altre parole il teorema vale per tutte le sinusoidi in cui è scomponibile il segnale di ingresso.

La risposta in frequenza consente quindi di calcolare la risposta a qualsiasi ingresso, poiché determina come si modificano le componenti armoniche dell'ingresso. In questo senso un sistema dinamico asintoticamente stabile si può vedere sempre come un **filtro**.

Particolare rilevanza assume una tipologia di filtro che prende il nome di **filtro passabasso**. Si tratta di un sistema dinamico asintoticamente stabile, che per semplicità considereremo a guadagno unitario, caratterizzato da un modulo della risposta in frequenza del tipo di quello riportato in figura:

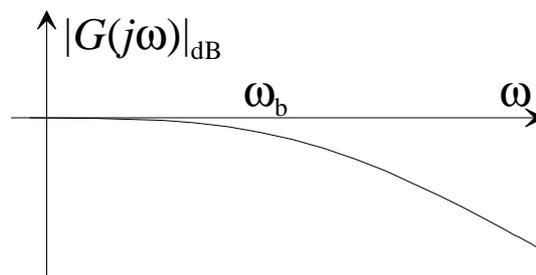


Fig. 20 : Diagramma del modulo di un filtro passabasso

Se risulta:

$$|G(j\omega)|_{dB} < -3, \forall \omega ,$$

ossia se il sistema non presenta risonanze, definiamo **banda passante** del filtro l'insieme di pulsazioni:

$$\{\omega: |G(j\omega)|_{dB} > -3\} = [0, \omega_b] ,$$

con ω_b estremo superiore della banda passante.

Un filtro passabasso, quindi, lascia passare le armoniche le cui pulsazioni sono interne alla sua banda passante ed attenua le altre.

Esercizi

Esercizio 6.1

Si scriva l'espressione dell'andamento di regime dell'uscita $y(t)$ del sistema dinamico descritto dalla funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{1}{s+2}$$

soggetto all'ingresso $u(t) = 3 \sin(t)$.

Esercizio 6.2

Si dica se è possibile che, a transitorio esaurito, l'uscita di un sistema asintoticamente stabile soggetto all'ingresso:

$$u(t) = \sin(t) + \sin(2t)$$

assuma l'espressione:

$$y(t) = B \sin(3t + \beta),$$

con B e β costanti opportune.

Esercizio 6.3

Si traccino i diagrammi di Bode asintotici del modulo e della fase per la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{10}{(1+0.1s)(1+s)}$$

Esercizio 6.4

Si traccino i diagrammi di Bode asintotici del modulo e della fase per la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{1+s}{1-0.1s}$$

Esercizio 6.5

Si traccino i diagrammi di Bode asintotici del modulo e della fase per la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{10}{s^2 + 0.2s + 1}$$

Esercizio 6.6

Si traccino i diagrammi di Bode asintotici del modulo e della fase per la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{1000}{(1+0.1s)(1-s)(1+10s)}$$

Traccia delle soluzioni

Esercizio 6.1

Utilizzando il teorema della risposta in frequenza, si ottiene, a transitorio esaurito:

$$y(t) = 3|G(j)| \sin[t + \arg(G(j))]$$

Poiché:

$$G(j) = \frac{1}{2+j} ,$$

si ha:

$$|G(j)| = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \arg(G(j)) = -\arctan(0.5) = -0.464 ,$$

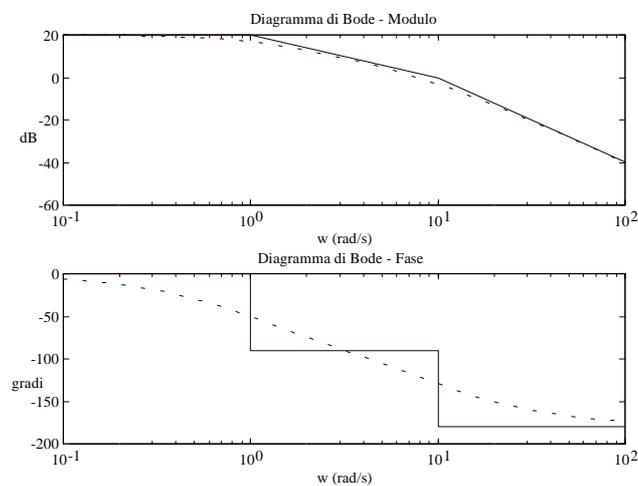
da cui:

$$y(t) = \frac{3}{\sqrt{5}} \sin[t - 0.464] .$$

Esercizio 6.2

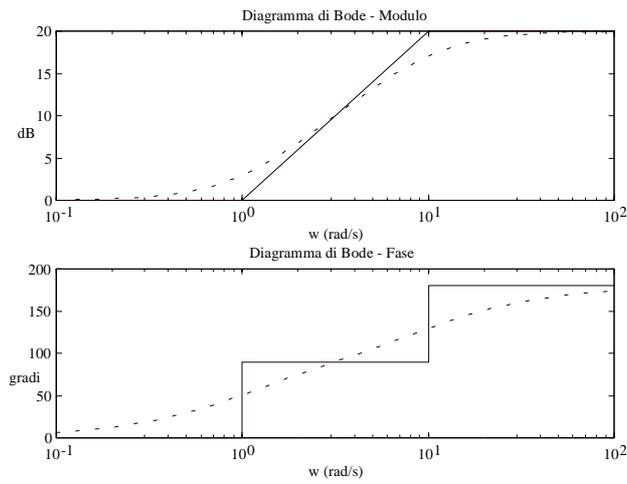
Non è possibile, in quanto, in base al teorema della risposta in frequenza ed al principio di sovrapposizione degli effetti, l'uscita sarà una combinazione lineare di due sinusoidi di pulsazioni 1 e 2 rad/s.

Esercizio 6.3 ¹

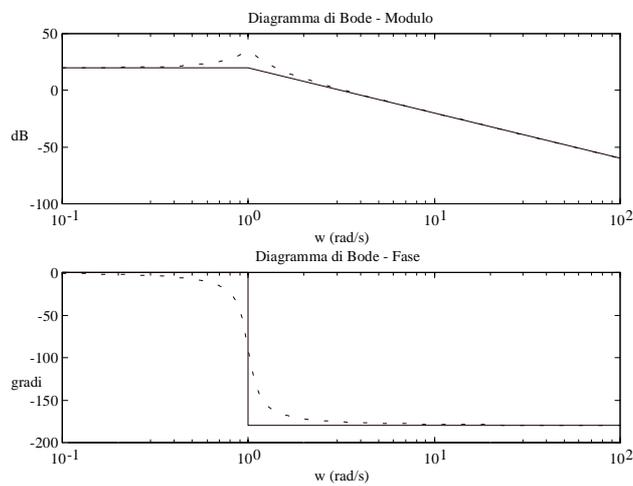


¹ Nelle figure sono riportati, con linea tratteggiata, anche i diagrammi di Bode esatti.

Esercizio 6.4



Esercizio 6.5



Esercizio 6.6

